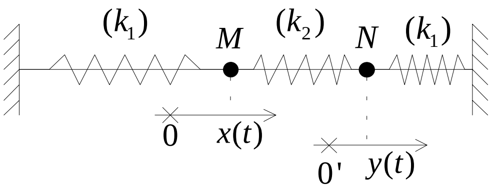
-EXERCICE 12.5-

• ENONCE :

« Oscillateurs mécaniques couplés »



Deux points matériels M et N, de même masse m, sont reliés entre eux par un ressort de raideur k_2 . Par ailleurs, ils sont reliés à 2 supports fixes par 2 ressorts ayant chacun la même raideur k_1 . L'ensemble peut coulisser sans frottements le long d'une tige horizontale fixe.

• On note $x(t)$ et $y(t)$ les élongations respectives des points M et N, comptées à partir de leur position d'équilibre où les ressorts ne sont ni allongés ni contractés.

1) Déterminer les modes propres du système et donner les pulsations propres correspondantes (on proposera 2 méthodes différentes).

2) Le point M est soumis à une force harmonique : $\vec{F} = F_0 \cos(\omega t)\vec{e}_x$.

Déterminer l'amplitude $X = |\underline{X}|$ du mouvement **permanent** du point M, et représenter la courbe $X = f(\omega)$, en faisant ressortir les phénomènes intéressants.

Tracer $\varphi = \arg(\underline{X})$ en fonction de ω et conclure.

3) Quelles conditions initiales faut-il donner à M pour « exciter » uniquement l'un ou l'autre des modes propres ?

4) Dans l'étude précédente, pourquoi est-il nécessaire de supposer un amortissement, même très léger ?

MECANIQUE DU POINT MATERIEL

EXERCICE D' ORAL

• CORRIGE : «Oscillateurs mécaniques couplés »

1) Nous allons écrire les équations différentielles (linéaires) régissant le mouvement des points M et N ; toute solution est une combinaison linéaire de solutions particulières, qui forment une base de l'espace vectoriel des solutions : ce sont les « modes propres ».

En l'absence de frottements, on sait que ces modes propres sont purement **harmoniques** : leurs pulsations sont les **pulsations propres** du système d'oscillateurs couplés.

• Le point matériel M est soumis aux forces suivantes : le poids et la réaction de la tige qui, en l'absence de frottements, se compensent ; une force de rappel exercée par le ressort de raideur k_2, et une autre exercée par l'un des ressorts de raideur k_1.

• Le PFD appliqué à M, et projeté sur l'axe Ox fournit :

$m\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}=\pm k_1x\pm k_2(y-x)$ (1) (en valeur absolue, l'allongement du ressort de raideur k_2 est égal à la différence des élongations de ses 2 extrémités)

• Il faut maintenant traduire algébriquement la réalité physique ; supposons que $(y-x)\succ 0$, le ressort de raideur k_2 est alors allongé ⇒ il tend à se contracter ⇒ il exerce sur son extrémité de gauche une force dirigée vers la droite, donc de valeur algébrique positive, c'est-à-dire du même signe que $(y-x)$ ⇒ il faut un signe « plus » devant le terme $k_2(y-x)$ de l'équation (1).

De façon analogue, on est conduit à un signe « moins » devant le terme en k_1x ; finalement :

$$\boxed{m\frac{d^2x(t)}{dt^2}+(k_1+k_2)x(t)-k_2y(t)=0} \qquad (2)$$

• De manière identique, on trouve pour le point N :

$$\boxed{m\frac{d^2y(t)}{dt^2}+(k_1+k_2)y(t)-k_2x(t)=0} \qquad (3)$$

• Il faut maintenant résoudre ces 2 équations différentielles linéaires **couplées** :

♦ **<u>1ère méthode</u> :** on pose $u(t)=x(t)+y(t)$ et $v(t)=x(t)-y(t)$, et l'on somme les équations (2) et (3) pour obtenir :

$\dfrac{d^2u(t)}{dt^2}+\dfrac{k_1}{m}u(t)=0 \;\Rightarrow\; u(t)=2A_1\cos\omega_1t+2B_1\sin\omega_1t$, avec : $\boxed{\omega_1=\sqrt{\dfrac{k_1}{m}}}$

La différence (2) – (3) fournit :

$\dfrac{d^2v(t)}{dt^2}+\dfrac{k_1+2k_2}{m}v(t)=0 \;\Rightarrow\; v(t)=2A_2\cos\omega_2t+2B_2\sin\omega_2t$, avec : $\boxed{\omega_2=\sqrt{\dfrac{k_1+2k_2}{m}}}$

⇒ les **modes propres** $u(t)$ et $v(t)$ permettent bien d'engendrer toutes les solutions selon :

$$\boxed{x(t)=\frac{u(t)+v(t)}{2}=A_1\cos\omega_1t+B_1\sin\omega_1t+A_2\cos\omega_2t+B_2\sin\omega_2t}$$

$$\boxed{y(t)=\frac{u(t)-v(t)}{2}=A_1\cos\omega_1t+B_1\sin\omega_1t-A_2\cos\omega_2t-B_2\sin\omega_2t}$$

♦ **2ème méthode :** les solutions particulières étant purement harmoniques, on passe en notation complexe, et l'on pose : $\underline{x}(t)=\underline{X}\exp(i\omega t)$ et $\underline{y}(t)=\underline{Y}\exp(i\omega t)$ $\Rightarrow$ en reportant ces relations dans les équations (2) et (3), on obtient après factorisation et simplification par $e^{i\omega t}$:

$$\begin{cases}\underline{X}(k_1+k_2-m\omega^2)-k_2\underline{Y}=0 & (4)\\ \underline{Y}(k_1+k_2-m\omega^2)-k_2\underline{X}=0 & (5)\end{cases}$$

Il s'agit d'un système linéaire **homogène** $\Rightarrow$ si le déterminant est non nul, la solution est unique et évidente, et vaut ($\underline{X}=0$, $\underline{Y}=0$), ce qui n'est guère intéressant d'un point de vue dynamique.

Il y aura une infinité de solutions (puisqu'il y en a au moins une), si et seulement si le **déterminant du système est nul**, il faut donc que :

$$\left(k_1+k_2-m\omega^2\right)^2-k_2^2=0 \Rightarrow \left(k_1+2k_2-m\omega^2\right)\left(k_1-m\omega^2\right)=0 \Rightarrow \boxed{\text{on retrouve bien } \omega_1 \text{ et } \omega_2}$$

2) Dans cette question, il suffit de modifier le bilan des forces s'exerçant sur le point M ; en notation complexe, la force supplémentaire s'écrira : $\underline{\vec{F}}(t)=F_0\exp(i\omega t)\vec{e}_x$,et on la prendra comme origine des phases ($F_0\in\mathbb{R}$). On obtient un nouveau système :

$$\begin{cases}\underline{X}(k_1+k_2-m\omega^2)-k_2\underline{Y}=F_0 & (6)\\ \underline{Y}(k_1+k_2-m\omega^2)-k_2\underline{X}=0 & (7)\end{cases}$$

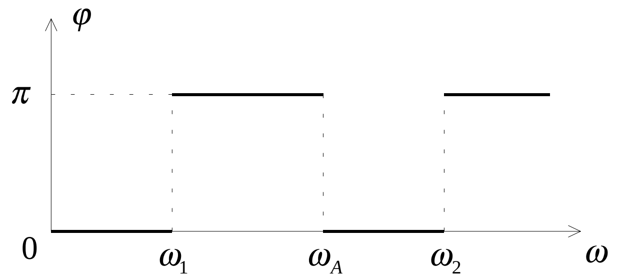
$\Rightarrow$ on tire $\underline{Y}$ de l'équation (7) et l'on reporte dans (6) :

$$\underline{Y}=\frac{k_2\underline{X}}{k_1+k_2-m\omega^2} \Rightarrow \underline{X}\left(k_1+k_2-m\omega^2-\frac{k_2^2}{k_1+k_2-m\omega^2}\right)=F_0 \Rightarrow \underline{X}=F_0\times\frac{k_1+k_2-m\omega^2}{\left(k_1+k_2-m\omega^2\right)^2-k_2^2}$$

, ou :

$$\boxed{\underline{X}=\frac{F_0}{m}\times\frac{\omega_A^2-\omega^2}{\left(\omega^2-\omega_1^2\right)\left(\omega^2-\omega_2^2\right)}} \quad \text{avec :} \quad \boxed{\omega_A=\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}}$$

• On constate que $\underline{X}\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\varphi=\arg(\underline{X})=0$ ou π $\Rightarrow$ traçons tout de suite la courbe :



$\omega\prec\omega_1$: $\underline{X}\in\mathbb{R}^+ \Rightarrow \varphi=0$

$\omega_1\prec\omega\prec\omega_A$: $\underline{X}\in\mathbb{R}^- \Rightarrow \varphi=\pi$

$\omega_A\prec\omega\prec\omega_2$: $\underline{X}\in\mathbb{R}^+ \Rightarrow \varphi=0$

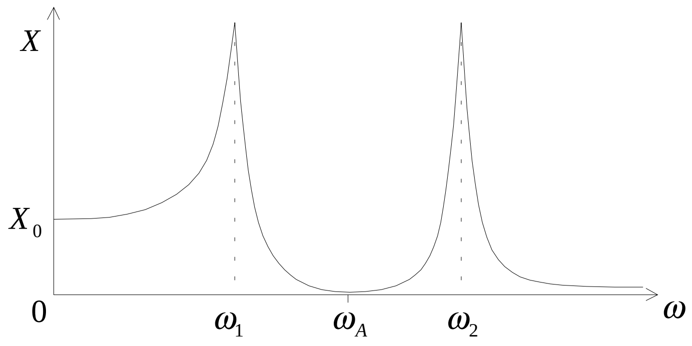
$\omega\succ\omega_2$: $\underline{X}\in\mathbb{R}^- \Rightarrow \varphi=\pi$

$\Rightarrow$ la force et l'élongation sont toujours en phase ou en opposition de phase

• En ce qui concerne l'amplitude des élongations du point M, on constate que $X=\left|\underline{X}\right|$ devient infinie lorsque les oscillateurs sont excités aux pulsations ω_1 et ω_2 : ce sont donc également les **pulsations de résonance** du système.

Un phénomène nouveau et intéressant apparaît : pour la pulsation ω_A, l'élongation de M est nulle, il s'agit d'une « **anti-résonance** ».

On peut alors tracer la courbe de l'amplitude :



Pour compléter l'étude, on peut remarquer que:

$\omega \to \infty : \ X \to 0$

$\omega \to 0 : \ X \to \boxed{X_0 = \frac{F_0}{m} \times \frac{\omega_A^2}{\omega_1^2 \times \omega_2^2}}$

3) En reprenant les expressions de $x(t)$ et $y(t)$, on constate qu'il y a 4 constantes d'intégration $\Rightarrow$ il faut 4 conditions initiales pour déterminer entièrement le mouvement de M et N : 2 portent sur l'élongation à t=0, 2 autres sur la vitesse à t=0.

- Pour « exciter » le mode (1) uniquement, il faut : $A_2 = B_2 = 0 \Rightarrow$ on constate alors que $x(t) = y(t)$, $\forall t \Rightarrow$ ce doit être vrai à $t = 0$ (et le rester) $\Rightarrow \boxed{x(0) = y(0) \ \text{ ET } \ \frac{dx}{dt}(0) = \frac{dy}{dt}(0)}$

$\Rightarrow$ les deux masses oscillent **EN PHASE**.

- Pour exciter le mode (2) uniquement, il faut : $A_1 = B_1 = 0 \Rightarrow x(t) = -y(t)$, $\forall t$; donc :

$\boxed{x(0) = -y(0) \ \text{ ET } \ \frac{dx}{dt}(0) = -\frac{dy}{dt}(0)}$ $\Rightarrow$ les 2 masses oscillent **EN OPPOSITION DE PHASE**.

Rq : dans le mode (1), il était surprenant de constater que le ressort de raideur k_2 n'intervenait pas dans l'expression de la pulsation $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m}}$: on comprend maintenant que les 2 masses oscillant en phase, ce ressort reste toujours ni allongé ni contracté $\Rightarrow$ il n'exerce alors aucune force sur ses extrémités.

4) En l'absence d'amortissement, on obtient une résonance infinie pour l'amplitude de l'élongation, donc pour l'amplitude de vitesse : un frottement fluide, si léger soit-il, devra finalement être pris en compte.

- Par ailleurs, nous avons supposé qu'un régime permanent **harmonique** (qui est la solution **particulière** de l'équation **avec second membre** pouvait être atteint : pour cela, il faut que le **régime libre** (combinaison linéaire des modes propres) puisse **s'amortir** $\Rightarrow$ il faut un terme d'amortissement dans l'équation, même faible.
- On retiendra donc que pour « contrôler » un système linéaire, c'est-à-dire obtenir une réponse (ici, le mouvement des masses) fidèle à « l'entrée » (la force appliquée au point M), il faut « un peu » de frottements...